集合値最適化における非凸分離型定理とその応用 (非線形解析学と凸解析学の研究)

荒谷, 洋輔

数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 198-205

Nonconvex separation type theorems and some applications in set optimization (集合値最適化における非凸分離型定理とその応用)

立命館大学 理工学部 荒谷 洋輔 (ARAYA, Yousuke)*
(College of Science and Technology, Ritsmeikan University)

1 はじめに

ベクトル最適化問題において、スカラー化手法は重要な研究テーマの一つである。1990 年頃、Gerth(Tammer)-Weidner は、Minkowski 汎関数から派生した劣線形スカラー化関数を提案し、ベクトル値関数における Ekeland の変分原理などの応用などを示した。

1997 年、黒岩-田中-Ha[10] は、に集合値写像の像空間の元(集合)における大小の比較について 6 種類の順序を導入し、その順序における最適化問題を提唱した。この最適化問題に対して、上記のベクトル値関数における(Minkowski 汎関数から派生した)劣線形スカラー化関数を集合値写像に対しても考えることはできるのか、という問題がある。それに対して、Hamel-Löhne [6]、Hernández-Rodríguez-Marín [7]、桑野-田中-山田 [12] などの先行研究がある。

私たちは、これらの結果の条件を緩めたり、まとめたりすることによりより詳しく集合値写像におけるスカラー化関数の性質を調べた。その際、集合値最適化問題特有のおもしろい性質が分かったので報告する。

2 準備

2.1 ベクトル最適化からの準備

本稿では (X,d) を完備距離空間、Y を線形位相空間とする。集合 $A\subset Y$ に対し、A の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{cor}A$、$\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、C は Y の部分集合で閉凸錐を表すものとする。つまり、(a) $\mathrm{cl}C=C$、(b) $C+C\subseteq C$、(c) $\lambda C\subseteq C$ $\forall\lambda\in[0,\infty)$。$0_Y$ を空間 Y の原点とする。錐 C が solid とは $\mathrm{int}C\neq\emptyset$ を満たすことであり、pointed とは $C\cap(-C)=\{0_Y\}$ が成立する場合である。

凸錐 C によって以下のようなベクトル(半)順序 $\leq_C$ が導入され、空間 $(Y,\leq_C)$ は半順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1,y_2\in Y,\qquad y_1\leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2-y_1\in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の(実)半順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

* *E-mail:* y-araya@fc.ritsumei.ac.jp

2.2 集合値最適化からの準備

$\mathcal{V}$をYの空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$に対して、２つの集合の和は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

$\alpha \in \mathbb{R}$と$V \in \mathcal{V}$に対して、スカラー積は以下のように定義される。

$$\alpha V := \{\alpha v | v \in V\}.$$

そのとき$\mathcal{V}$は、$\{0_Y\}$を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (set-relations [10, 11]). $A, B \subset \mathcal{V}$とsolidな凸錐$C \subset Y$に対して、

$$A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \qquad A \leq_{\mathrm{int}C}^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + \mathrm{int}C,$$

$$A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C \qquad A \leq_{\mathrm{int}C}^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - \mathrm{int}C.$$

注意 1. ベクトル順序と集合における順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$と$C \subset Y$に対して$y \in x+C$と$x \in y-C$は同値である。一方、集合における順序の場合、$A, B \in 2^Y$と$C \subset Y$に対して、上の２つの順序に対応する$B \subset A + C (A \leq_C^l B)$と$A \subset B - C (A \leq_C^u B)$は一般に異なることが次の例で確かめられる。

例 1.

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$A_1 = [0, 2] \times [0, 2] \quad B_1 = [3, 5] \times [0, 1] \qquad A_2 = [0, 2] \times [1, 2] \qquad B_2 = [3, 5] \times [0, 2]$$

このとき、次のことが分かる。$A_1 \leq_C^l B_1, A_1 \not\leq_C^u B_1$、$A_2 \not\leq_C^l B_2, A_2 \leq_C^u B_2$。

よって$\leq_C^l$と$\leq_C^u$は比較することができない。

命題 2.2 ([12]). $A, B \subset \mathcal{V}$と$y \in Y$に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \Longrightarrow (A + y) \leq_C^{l[u]} (B + y);$

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \Longrightarrow \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$ *for* $\alpha \geq 0;$

(iii) $\leq_C^l$と$\leq_C^u$は、反射律と推移律が成り立つ。

ここで、いくつかの定義をする。集合AがC-closed [$(-C)$-closed]とは、$A + C$ [$A - C$]が閉集合であること、C-bounded [$(-C)$-bounded]とは、Yの0_Yにおける任意の近傍Uに対して、$A \subset tU + C$ [$A \subset tU - C$]となるような$t > 0$が存在すること、C-compact [$(-C)$-compact]とは、Aの任意の開被覆$\{U_\alpha + C | U_\alpha$：開集合$\}$ [$\{U_\alpha - C | U_\alpha$：開集合$\}$]が有限個の開被覆で覆うことができるときに言う。任意のC-compact集合はC-closedでC-boundedである。([14]). 集合$A \in \mathcal{V}$がC-properとは、$A + C \neq Y$、$(-C)$-properとは、$A - C \neq Y$である。$\mathcal{V}_C$をYのC-properな集合族、$\mathcal{V}_{-C}$をYの$(-C)$-properな集合族、$\mathcal{V}_{C,-C}$をYのC-properで$(-C)$-properな集合族とする。

注意 2. ベクトル順序$\leq_C^l$と$\leq_{\mathrm{int}C}^l$は明らかに異なる。しかし、集合における順序の場合について、次の例は$\leq_C^l$と$\leq_{\mathrm{int}C}^l$が同値になることもあることを示している。よって、$\leq_C^l$と$\leq_{\mathrm{int}C}^l$を区別したいとき、集合AにC-closedの仮定が必要となる。

例 2.

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}^2_+ \qquad A = \{(x,y)|y \le \log x, x > 0, y \in \mathbb{R}\} \quad B = [1,2] \times [0,1]$$

このとき、$A + C = A + \mathrm{int}C = \{(x,y)|x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ が分かり、したがって

$$A \le^l_C B \ (B \subset A + C) \Longleftrightarrow A \le^l_{\mathrm{int}C} B \ (B \subset A + \mathrm{int}C)。$$

同様にして $\le^u_C$ と $\le^u_{\mathrm{int}C}$ を区別したいとき、集合 B に $(-C)$-closed の仮定が必要となる。

$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \le^l_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \le^l_C V_1,$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \le^u_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \le^u_C V_1,$$

集合の同値関係をそれぞれ $[\cdot]^l$ と $[\cdot]^u$ と書く。定義より $A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$ と $A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$ が分かる。

定義 2.3. $A \in \mathcal{V}$ が $l[u]$-minimal set であるとは、任意の $B \in \mathcal{V}$ について

$$B \le^{l[u]}_C A \quad \text{implies} \quad A \le^{l[u]}_C B$$

が成り立つことである。(あるいは、$B' \le^{l[u]}_C A$ となる $B' \in \mathcal{V}$ が存在しない) さらに、$A \in \mathcal{V}$ が $l[u]$-weak minimal set であるとは、任意の $B \in \mathcal{V}$ について

$$B \le^{l[u]}_{\mathrm{int}C} A \quad \text{implies} \quad A \le^{l[u]}_{\mathrm{int}C} B$$

が成り立つことである。(あるいは、$B' \le^{l[u]}_{\mathrm{int}C} A$ となる $B' \in \mathcal{V}$ が存在しない) $\mathcal{V}$ の $l[u]$-minimal set の族を $l[u]$-Min$\mathcal{V}$、$\mathcal{V}$ の $l[u]$-weak minimal set の族を $l[u]$-wMin$\mathcal{V}$ と書く。

定義から、以下のことが分かる。$l[u]\text{-Min}\mathcal{V} \subset l[u]\text{-wMin}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

3 集合に対するスカラー化関数

3.1 ベクトルに対するスカラー化関数

Gerth(Tammer) と Weidner は次のようなスカラー化関数を導入した。

補題 3.1 ([4, 5]). $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty]$ を次で定義する。

$$\varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R}\,|y \le_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R}\,|y \in tk^0 - C\}$$

この時、関数 φ_{C,k^0} は次の 6 つの性質をもつ。

(i) $\mathrm{dom}\varphi_{C,k^0} := \{y \in Y|\varphi_{C,k^0}(y) < \infty\} \ne \emptyset$、任意の $y \in Y$ に対して $\varphi_{C,k^0}(y) > -\infty$、

(ii) $\{y \in Y|\varphi_{C,k^0}(y) \le t\} = tk^0 - C$、

(iii) φ_{C,k^0} は下半連続 (任意の $t \in R$ に対して、$\{y \in Y|\varphi_{C,k^0}(y) \le t\}$ が閉集合)、

(iv) φ_{C,k^0} は $\le_C$-増加 ($y_1 \le_C y_2$ なら $\varphi_{C,k^0}(y_1) \le \varphi_{C,k^0}(y_2)$)、

(v) 任意の $y \in Y$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi_{C,k^0}(y+\lambda k^0) = \varphi_{C,k^0}(y) + \lambda$、

(vi) φ_{C,k^0} は劣加法的 (任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対して、$\varphi_{C,k^0}(y_1+y_2) \leq \varphi_{C,k^0}(y_1) + \varphi_{C,k^0}(y_2)$)。

さらに $k^0 \in \mathrm{int}C$ なら、次の 4 つの性質をもつ。

(vii) φ_{C,k^0} は実数値関数、

(viii) $\{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) < t\} = tk^0 - \mathrm{int}C$、

(ix) φ_{C,k^0} は狭義 $\leq_{\mathrm{int}C}$-増加 ($y_2 - y_1 \in \mathrm{int}C$ なら $\varphi_{C,k^0}(y_1) < \varphi_{C,k^0}(y_2)$)、

(x) φ_{C,k^0} は連続。

[1] では、次のスカラー化関数の性質を調べている。(実際には、2 変数関数へ拡張した形で書かれている) $\psi_{C,k^0} : Y \times Y \to [-\infty, \infty)$

$$\psi_{C,k^0}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + C\}$$

ここで、$\psi_{C,k^0}(y) = -\varphi_{C,k^0}(-y)$ が分かる。([15])

3.2 集合に対するスカラー化関数

ここで、ベクトルに対するスカラー化関数 $\varphi_{C,k^0}, \psi_{C,k^0}$ を集合の場合に拡張してみる。集合の場合は順序が $\leq_C^l$、$\leq_C^l$ の 2 通りあるので、$\varphi_{C,k^0}, \psi_{C,k^0}$ それぞれ 2 通りの合計 4 通りを考える。$\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、$h_{\inf}^l, h_{\inf}^u : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ と $h_{\sup}^l, h_{\sup}^u : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty)$ を次のように定義する。本稿は [2] の簡略版であり、実際には (集合を変数と見た場合の) 2 変数関数で定義し、性質を調べている。

$$h_{\inf}^l(V_y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \leq_C^l tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V_y + C\},$$

$$h_{\inf}^u(V_y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \leq_C^u tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \subset tk^0 - C\},$$

$$h_{\sup}^l(V_y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C^l V_y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \subset tk^0 + C\},$$

$$h_{\sup}^u(V_y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C^u V_y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V_y - C\}.$$

この集合に対するスカラー化関数は、桑野-田中-山田 [12] によって初めて定義されたが、その前にも似た形のものが Hamel-Löhne [6]、Hernández-Rodríguez-Marín [7] によって研究されている。しかし、性質は一部しか調べられておらず、特に $k^0 \in \mathrm{int}C$ の場合の性質は解明されていないので、その性質を調査するのが本稿の目的である。

その前に、次の性質が分かる。

$$h_{\sup}^l(V_y) = -h_{\inf}^u(-V_y) \quad \text{and} \quad h_{\sup}^u(V_y) = -h_{\inf}^l(-V_y).$$

l 型と u 型は、対 (つい) の関係になっていることが重要である。よって集合に対するスカラー化関数は、ベクトルの場合とは異なり、$h_{\inf}^l$ と $h_{\inf}^u$ の 2 つを調べる必要がある。

定理 3.2. スカラー化関数 $h^l_{\inf}: \mathcal{V}_C \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h^l_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h^l_{\inf}(V_y) \leq t \Longleftrightarrow tk^0 \in V_y + C$、

(iii) $h^l_{\inf}$ は $\leq^l_C$-増加、

(iv) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h^l_{\inf}(V_y + \lambda k^0) = h^l_{\inf}(V_y) + \lambda$、

(v) $V_y \in [V_{\bar{y}}]^l \Longrightarrow h^l_{\inf}(V_y) = h^l_{\inf}(V_{\bar{y}})$、

(vi) $h^l_{\inf}$ は劣線形。

さらに、$k^0 \in \mathrm{int}C$ ならば、$h^l_{\inf}$ は次の性質をもつ。

(vii) $h^l_{\inf}$ は実数値関数。

さらに、$k^0 \in \mathrm{int}C$ と V_y が *C-closed* ならば、$h^l_{\inf}$ は次の性質をもつ。

(viii) $h^l_{\inf}(V_y) < t \Longleftrightarrow tk^0 \in V_y + \mathrm{int}C$、

(ix) $h^l_{\inf}$ は、狭義 $\leq^l_{\mathrm{int}C}$-増加。

注意 3. 関数 $h^l_{\inf}$ の性質については、一部は調査されている ([6, 15])。(v)、(vi)、(vii) が新たに分かった事である。また (ix) について、[6] では V_y にコンパクト性を仮定して $h^l_{\inf}$ の狭義 $\leq^l_{\mathrm{int}C}$-増加性を得ているが、私たちは、V_y の仮定が C-closed で十分であることを示した。

定理 3.3. スカラー化関数 $h^u_{\inf}: \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h^u_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h^u_{\inf}(V_y) \leq t \Longleftrightarrow V_y \subset tk^0 - C$、

(iii) $h^u_{\inf}$ は $\leq^u_C$-増加、

(iv) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h^u_{\inf}(V_y + \lambda k^0) = h^u_{\inf}(V_y) + \lambda$、

(v) $V_y \in [V_{\bar{y}}]^u \Longrightarrow h^u_{\inf}(V_y) = h^u_{\inf}(V_{\bar{y}})$、

(vi) $h^u_{\inf}$ は劣線形。

さらに、$k^0 \in \mathrm{int}C$ ならば、$h^u_{\inf}$ は次の性質をもつ。

(vii) $h^u_{\inf}(V_y) < t \Longleftrightarrow V_y \subset tk^0 - \mathrm{int}C$、

(viii) $h^u_{\inf}$ は、狭義 $\leq^u_{\mathrm{int}C}$-増加。

さらに、$k^0 \in \mathrm{int}C$ と V_y が *$(-C)$-bounded* ならば、$h^u_{\inf}$ は次の性質をもつ。

(ix) $h^u_{\inf}$ は実数値関数。

注意 4. 関数 $h^u_{\inf}$ についても同様に先行研究 ([15, 6]) があるが、(v)、(vi)、(vii) が新たに分かった事である。また (viii) について、[6] では V_y にコンパクト性を仮定して $h^u_{\inf}$ の狭義 $\leq^u_{\mathrm{int}C}$-増加性を得ているが、V_y のコンパクト性をはずしても良いことが分かった。このようにして、$h^l_{\inf}$、$h^u_{\inf}$ の狭義 $\leq^u_{\mathrm{int}C}$-増加性の仮定が異なることなどより、$h^l_{\inf}$ と $h^u_{\inf}$ は完全に別物であることが分かる。

4 応用

4.1 非凸分離型定理

スカラー化関数 φ_{C,k^0} は guage 関数に近い性質を持っていることが分かった。この関数を利用することにより、次のような非凸集合に対する分離定理を Gerth(Tammer) と Weidner が発表した。

定理 4.1 ([4, 5]). Y を線形位相空間、C を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ $A \subset Y$ を $A \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset$ を満たす空でない集合とする。そのとき関数 φ_{C,k^0} は有限値をとる連続な関数で、任意の $x \in A$、$y \in \mathrm{int}C$ に対し次の式を満たす。

$$\varphi_{C,k^0}(-y) < 0 \le \varphi_{C,k^0}(x)$$

さらに、任意の $x \in \mathrm{int}A$ について $\varphi_{C,k^0}(x) > 0$ である。

ここで、上の定理を集合の場合へ拡張する。定理 3.2 の (viii) [(ii)] において $t = 0$ とすると、次の拡張定理を得ることができる。

定理 4.2 (*l*-**infimum type**). Y を線形位相空間、C を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$、B を空でない集合とする。$V_b \in \mathcal{V}_C$ を *C-closed* であるとすると、次が成り立つ。

$$0_Y \notin V_b + \mathrm{int}C \iff h^l_{\mathrm{inf}}(V_b) \ge 0 \qquad \forall b \in B$$

$$\left[0_Y \notin V_b + C \iff h^l_{\mathrm{inf}}(V_b) > 0 \qquad \forall b \in B \right].$$

同様にして、u-type の拡張定理も得られる。

定理 4.3 (*u*-**infimum type**). Y を線形位相空間、C を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$、B を空でない集合とする。$V_b \in \mathcal{V}$ を $(-C)$-*bounded* であるとすると、次が成り立つ。

$$V_b \not\subset -\mathrm{int}C \iff h^u_{\mathrm{inf}}(V_b) \ge 0 \qquad \forall b \in B$$

$$\left[V_b \not\subset -C \iff h^u_{\mathrm{inf}}(V_b) > 0 \qquad \forall b \in B \right].$$

4.2 集合値写像に対する Caristi の不動点定理

定理 4.4 (*l*-**type**). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in C \backslash (-C)$、$F : X \to \mathcal{V}_C$ を *C-closed* な値をとる関数、$T : X \to 2^X$ を写像とする。次の仮定をする。

(i) F は、下に有界

(ある $V_a \in \mathcal{V}_C$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $V_a \le^l_C F(x)$ が成り立つ。)、

(ii) F は、l-k^0-下半連続　(任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in X | F(x) \le^l_C tk^0\}$ が閉集合)、

(iii) 任意の $x \in X$ に対して、$y \in Tx$ となる $y \in X$ が存在して $F(y) + d(x,y)k^0 \le^l_C F(x)$。

そのとき、$\bar{x} \in T\bar{x}$ となる $\bar{x} \in X$ が存在する。
もし $k^0 \in \mathrm{int}C$ ならば、条件 (ii) は、次のように緩めることができる。

(ii') F は、下に有界。

(ある $V_a \in \mathcal{V}_C$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $F(x) - V_a$ が C-*closed* かつ、

$0_Y \notin F(x) - V_a + \mathrm{int}C$ が成り立つ。)

Proof. まず、$(h^l_{\inf} \circ F)(x)$ が任意の $x \in X$ に対して下へ有界であることを示す。定理 3.2 の (i) と (iii) から、任意の $x \in X$ に対して

$$-\infty < h^l_{\inf}(V_a) \leq h^l_{\inf}(F(x))$$

が分かる。次に $(h^l_{\inf} \circ F)(x)$ が下半連続であることを示す。定理 3.2 の (ii) から、次が分かる。

$$\{x \in X | (h^l_{\inf} \circ F)(x) \leq t\} = \{x \in X | \{tk^0\} \subset F(x) - C\} = \{x \in X | F(x) \leq^l_C tk^0\},$$

仮定より、任意の $t \in \mathbb{R}$ について、レベル集合が閉であることが言えた。さらに、定理 3.2 の (iii)、(iv) から次が分かる。

$$h^l_{\inf}(F(y)) + d(x,y) \leq h^l_{\inf}(F(x)).$$

よって、$h^l_{\inf} \circ F$ は、Caristi の不動点定理 [3] の仮定を全て満たすので、不動点が存在する。
$k^0 \in \mathrm{int}C$ の場合は、定理 4.2 と定理 3.2 の (vi) より、任意の $x \in X$ に対して

$$0 \leq h^l_{\inf}(F(x) - V_a) \leq h^l_{\inf}(F(x)) + h^l_{\inf}(-V_a)$$

が言えて、したがって

$$-\infty < -h^l_{\inf}(-V_a) \leq h^l_{\inf}(F(x))$$

つまり、$(h^l_{\inf} \circ F)(x)$ は X 上で下に有界であることが分かる。 □

定理 4.5 (u**-type**)**.** X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$F : X \to \mathcal{V}$ を $(-C)$-*bounded* な値をとる関数、$T : X \to 2^X$ を写像とする。次の仮定をする。

(i) F は、下に有界

(ある $V_a \in \mathcal{V}$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $V_a \leq^u_C F(x)$ が成り立つ。)、

(ii) F は、u-k^0-下半連続　(任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in X | F(x) \leq^u_C tk^0\}$ が閉集合。)、

(iii) 任意の $x \in X$ に対して、$y \in Tx$ となる $y \in X$ が存在して $F(y) + d(x,y)k^0 \leq^u_C F(x)$。

そのとき、$\bar{x} \in T\bar{x}$ となる $\bar{x} \in X$ が存在する。
もし $k^0 \in \mathrm{int}C$ ならば、条件 (ii) は、次のように緩めることができる。

(ii') F は、下に有界。

(ある $V_a \in \mathcal{V}$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $F(x) - V_a$ が $(-C)$-*bounded* かつ、

$F(x) - V_a \not\subset -\mathrm{int}C$ が成り立つ。)

参考文献

[1] Y. Araya, *Nonlinear scalarizations and some applications in vector optimization*, Nihonkai Math. J. 21, (2010) 35–45.

[2] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, submitted.

[3] J. Caristi, *Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.215, pp.241–251, 1976.

[4] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67, (1990) 297–320.

[5] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[6] A. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7, (2006) 19–37.

[7] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325, (2007) 1–18.

[8] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Existence theorems for set optimization problem*, Nonlinear Anal. 67, (2007) 1726–1736.

[9] J. Jahn, *Vector optimization: Theory, applications, and extensions*, Springer-Verlag, Berlin (2004).

[10] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, (1997) 1487–1496.

[11] D. Kuroiwa, *On set-valued optimization*, Nonlinear Anal. 47, (2001) 1395–1400.

[12] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 193–204. Yokohama Publishers, Yokohama (2009).

[13] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 161–177. Yokohama Publishers, Yokohama (2010).

[14] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[15] S. Nishizawa, T. Tanaka, and P. Gr. Georgiev, *On inherited properties of set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 341–350. Yokohama Publishers, Yokohama (2003).

[16] A. Shimizu, S Nishizawa and T. Tanaka, *Optimality conditions in set-valued optimization using nonlinear scalarization methods*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 565–574. Yokohama Publishers, Yokohama (2007).